

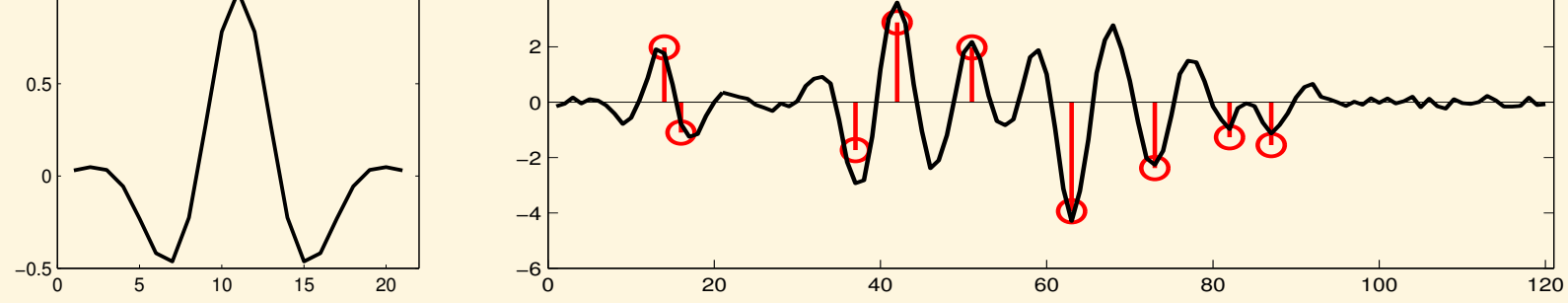
## APPROXIMATION PARCIMONIEUSE

## Problèmes inverses parcimonieux :

on cherche  $x$  avec peu de composantes non nulles tel que  $y \simeq Hx$ .

## • Déconvolution de trains d'impulsions

(sismologie, contrôle non destructif par ultrasons)

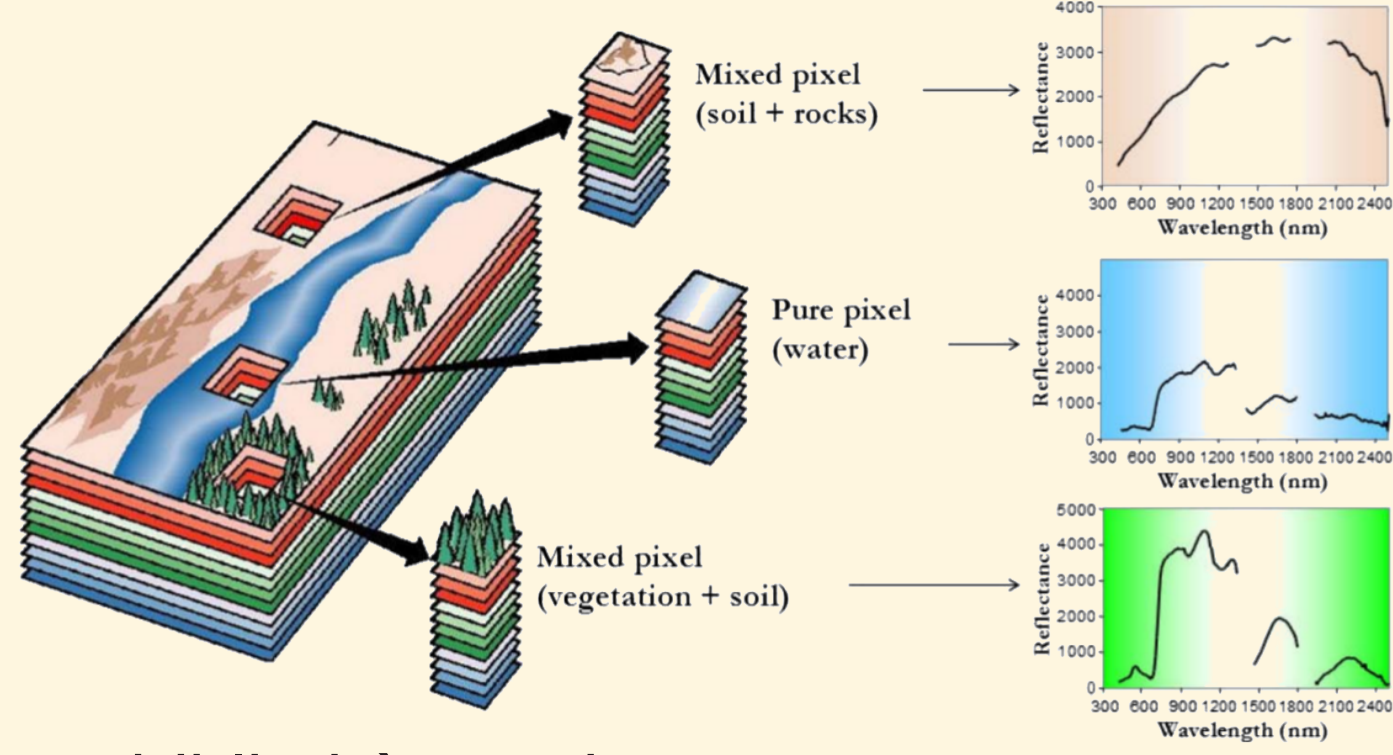


filtre  $h$  ○  $x$ ,  $-y = h * x + \text{bruit}$

$H$  = matrice de convolution

$x \rightsquigarrow$  détection de discontinuités / défauts

## • Démélange de spectres (imagerie hyperspectrale)



$H$  = bibliothèque de spectres purs

$x \rightsquigarrow$  composantes présentes + proportions

## • Estimation de modèles, sélection de variables, ...

OPTIMISATION EN NORME  $\ell_0$ 

## Problème d'optimisation bi-objectif :

$$\min_x \left\{ \|y - Hx\|_2^2, \|x\|_0 \right\}, \quad \|x\|_0 := \text{Card} \{q | x_q \neq 0\}$$

$$\rightarrow \min_x \|x\|_0 \text{ t.q. } \|y - Hx\|_2^2 \leq \epsilon \quad (\mathcal{P}_{0/2})$$

$$\rightarrow \min_x \|y - Hx\|_2^2 \text{ t.q. } \|x\|_0 \leq K \quad (\mathcal{P}_{2/0})$$

$$\rightarrow \min_x \|y - Hx\|_2^2 + \mu \|x\|_0 \quad (\mathcal{P}_{p+0})$$

• Norme  $\ell_0$  à valeurs discrètes  $\rightsquigarrow$  pb combinatoire

## • Méthodes approchées peu coûteuses :

[1]

– relaxation convexe :  $\|x\|_0 \rightsquigarrow \|x\|_1$

– méthodes gloutonnes : exploration combinatoire partielle

... mais ne résolvent pas le problème initial

–  $H$  très corrélé  $\rightsquigarrow$  conditions théoriques inapplicables

– résultats empiriques défavorables

• Travaux en norme  $\ell_0$  [2, 3, 4] : convergence locale• Pourtant : l'optimisation exacte en norme  $\ell_0$  ne requiert pas forcément une recherche exhaustive!

## RÉFÉRENCES

- [1] JA Tropp and SJ Wright, "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems," *Proc. IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 948–958, 2010.
- [2] H Mohimani, M Babaie-Zadeh, and C Jutten, "A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $\ell_0$  norm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 1, pp. 289–301, 2009.
- [3] T Blumensath and ME Davies, "Iterative thresholding for sparse approximations," *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 14, no. 5–6, pp. 629–654, 2008.
- [4] Z Lu and Y Zhang, "Sparse approximation via penalty decomposition methods," *SIAM J. Optimization*, vol. 23, no. 4, pp. 2448–2478, 2013.
- [5] S Bourguignon, J Ninin, H Carfantan, and M Mongeau, "Exact resolution of sparse approximation problems via mixed-integer programming," *submitted to IEEE Trans. Signal Process.*, 2015.
- [6] I Tomic and S Drewes, "Learning joint intensity-depth sparse representations," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 23, no. 5, 2014.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet Jeunes Chercheurs 2013 du GdR ISIS (SB-JN). MM a été partiellement financé par l'Agence Nationale de la Recherche, projet JCJC ATOMIC n°12-JS02-009-01.

PROGRAMMATION MIXTE EN  
NOMBRES ENTIERES (MIP)

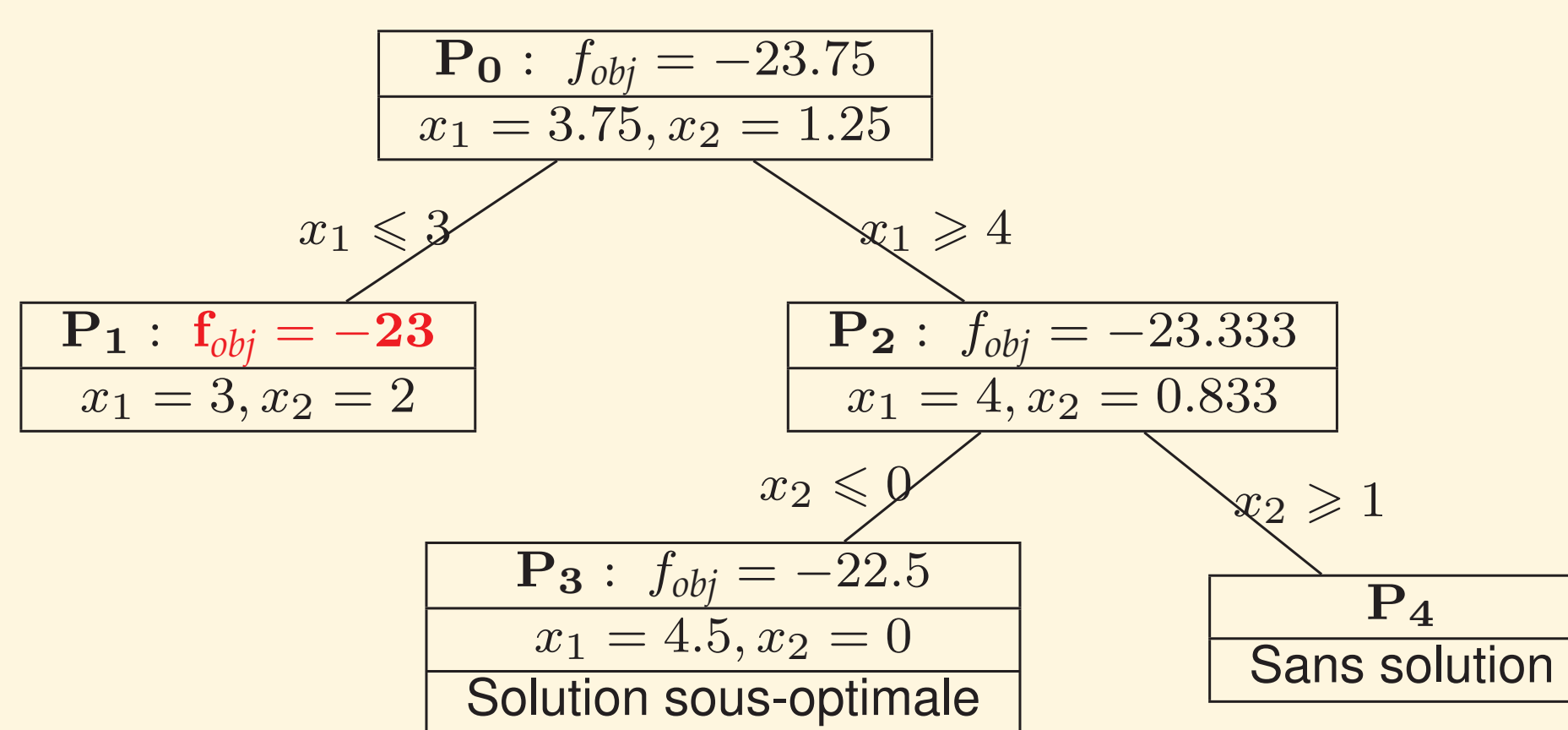
## MIP quadratique à contraintes quadratiques :

$$\min_{v \in \mathbb{R}^J} v^T F v + c^T v, \text{ t.q. } \begin{cases} v^T B v + d^T v \leq e, & l_b \leq v \leq u_b, \\ A_{in} v \leq b_{in}, & A_{eq} v = b_{eq}, \\ v_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

## • Méthodes de résolution exactes: Branch and Cut

– Branch and Bound : énumération implicite des solutions

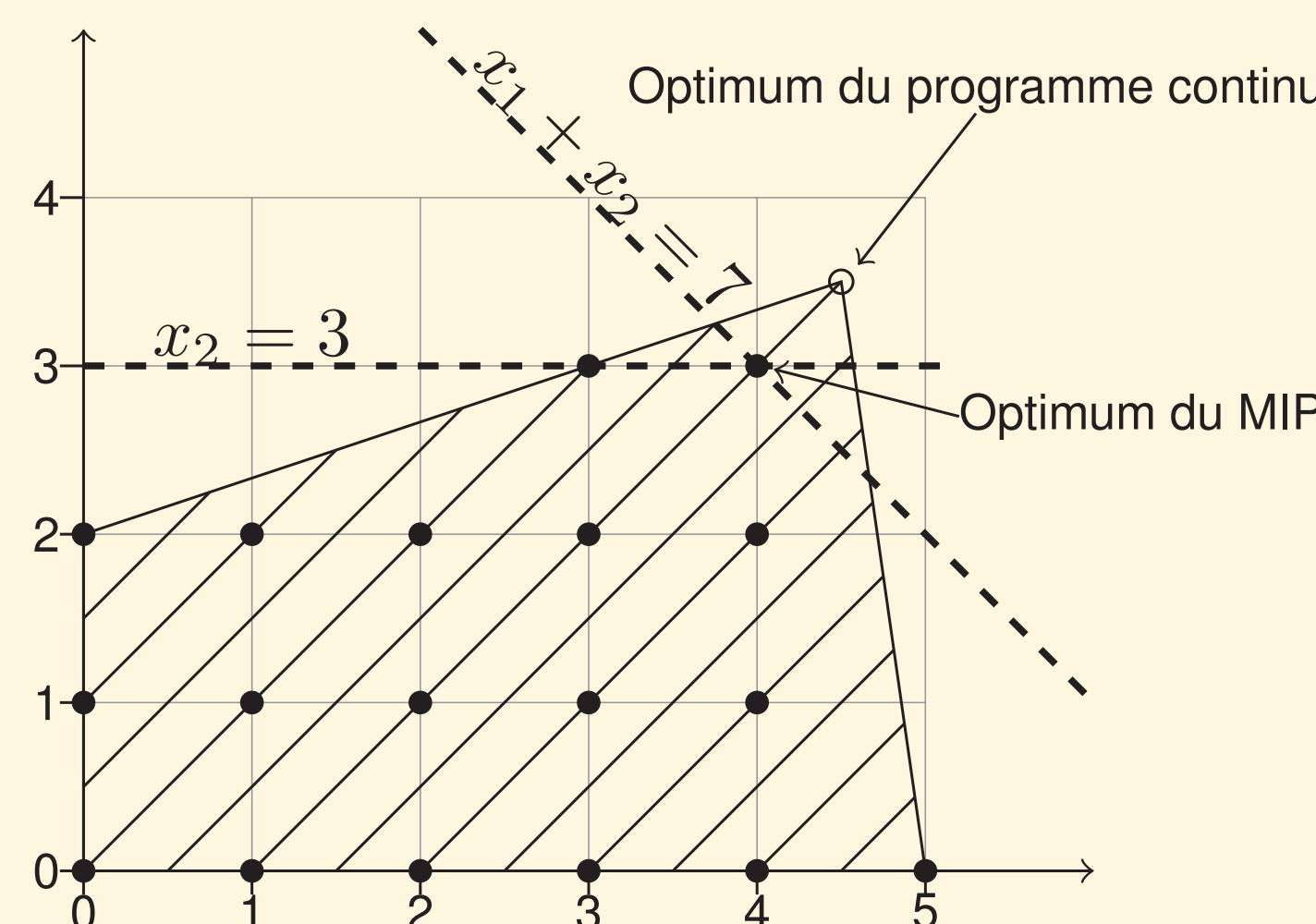
$$\min_{x_1, x_2} f_{obj} = -5x_1 - 4x_2 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, & x_1 \geq 0, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, & x_2 \geq 0 \end{cases}$$



– Méthodes de coupe (Gomory, ...) :

$\rightsquigarrow$  relaxations continues successives (variables binaires)

$\rightsquigarrow$  raffinement de la solution du programme continu pour converger vers une solution entière



$\Rightarrow$  convergence avec preuve d'optimalité

## • Choix de la mesure d'attache aux données

– quadratique  $\rightsquigarrow$  MIP quadratiques

– linéaire par morceaux  $\rightsquigarrow$  MIP linéaires

$\rightsquigarrow \|y - Hx\|_1$  (bruit laplacien)

$\rightsquigarrow \|y - Hx\|_\infty$  (bruit uniforme)

REFORMULATIONS DE CRITÈRES  
PARCIMONIEUX• Reformulation de la norme  $\ell_0$ 

– Variables binaires  $b_q$  telles que  $x_q = 0 \Leftrightarrow b_q = 0$ .

$$\rightsquigarrow \|x\|_0 = \sum_{q=1}^Q b_q.$$

– Hypothèse de borne :  $\forall q, -M < x_q < M$ . Alors :

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|x\|_0 \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} \sum_{q=1}^Q b_q \text{ t.q. } -Mb \leq x \leq Mb$$

$\rightsquigarrow$  reformulation de  $\mathcal{P}_{0/2}$  et  $\mathcal{P}_{0+2}$

$$\|x\|_0 \leq K \Leftrightarrow \exists b \in \{0, 1\}^Q \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_q b_q \leq K \\ -Mb \leq x \leq Mb \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  reformulation de  $\mathcal{P}_{2/0}$

• Reformulation des attaches aux données  $\ell_1$  et  $\ell_\infty$ 

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|y - Hx\|_1 \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} \sum_n w_n \text{ t.q. } -w \leq y - Hx \leq w$$

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|y - Hx\|_\infty \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} t \text{ t.q. } -t1_N \leq y - Hx \leq t1_N$$

$\rightsquigarrow$  MIP linéaires à contraintes linéaires

• Un exemple :  $\min_{x \in \mathbb{R}^Q} \|y - Hx\|_1 \text{ t.q. } \|x\|_0 \leq K$ 

$$\Leftrightarrow \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^Q \\ b \in \{0, 1\}^Q \\ w \in \mathbb{R}^N}} \sum_n w_n \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_q b_q \leq K \\ -w \leq y - Hx \leq w \\ -Mb \leq x \leq Mb \end{cases}$$

## COÛTS DE CALCUL

## • Problèmes de déconvolution parcimonieuse

$x \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $K = 9$  composantes non nulles

Mise en œuvre sous IBM ILOG CPLEX

• Réglage heuristique de la borne  $M$  :

i) Initialisation  $M_0 = \|H^T y\|_\infty / \|h\|_2^2$

ii) Si la borne est atteinte en la solution ( $\hat{x}_q = M_k$ ), la reformulation de la norme  $\ell_0$  n'est pas valide. L'optimisation est alors relancée avec  $M_{k+1} = 1.1M_k$ .

RSB	$\mathcal{P}_{0/2}$	$\mathcal{P}_{0/1}$	$\mathcal{P}_{0/\infty}$	$\mathcal{P}_{2/0}$	$\mathcal{P}_{1/0}$	$\mathcal{P}_{\infty/0}$	$\mathcal{P}_{0+2}$	$\mathcal{P}_{0+1}$	$\mathcal{P}_{0+\infty}$
30 dB	122	3	2.1	2.8	9.1	21	1.2	4.9	5.2
20 dB	243 <sup>(3)</sup>	4.7	2.6	14	28	45 <sup>(1)</sup>	64	17 <sup>(2)</sup>	121
10 dB	513 <sup>(12)</sup>	21	45	35 <sup>(1)</sup>	182 <sup>(1)</sup>	206 <sup>(4)</sup>	121 <sup>(5)</sup>	234 <sup>(2)</sup>	141 <sup>(6)</sup>

Temps de calcul (s) pour l'optimisation des neuf problèmes reformulés en MIP (moyennes sur 20 réalisations).

Entre parenthèses : nombre de réalisations n'ayant pas fourni de solution optimale en 1000 s.

Rq : exploration combinatoire complète évaluée à 1.5 an.

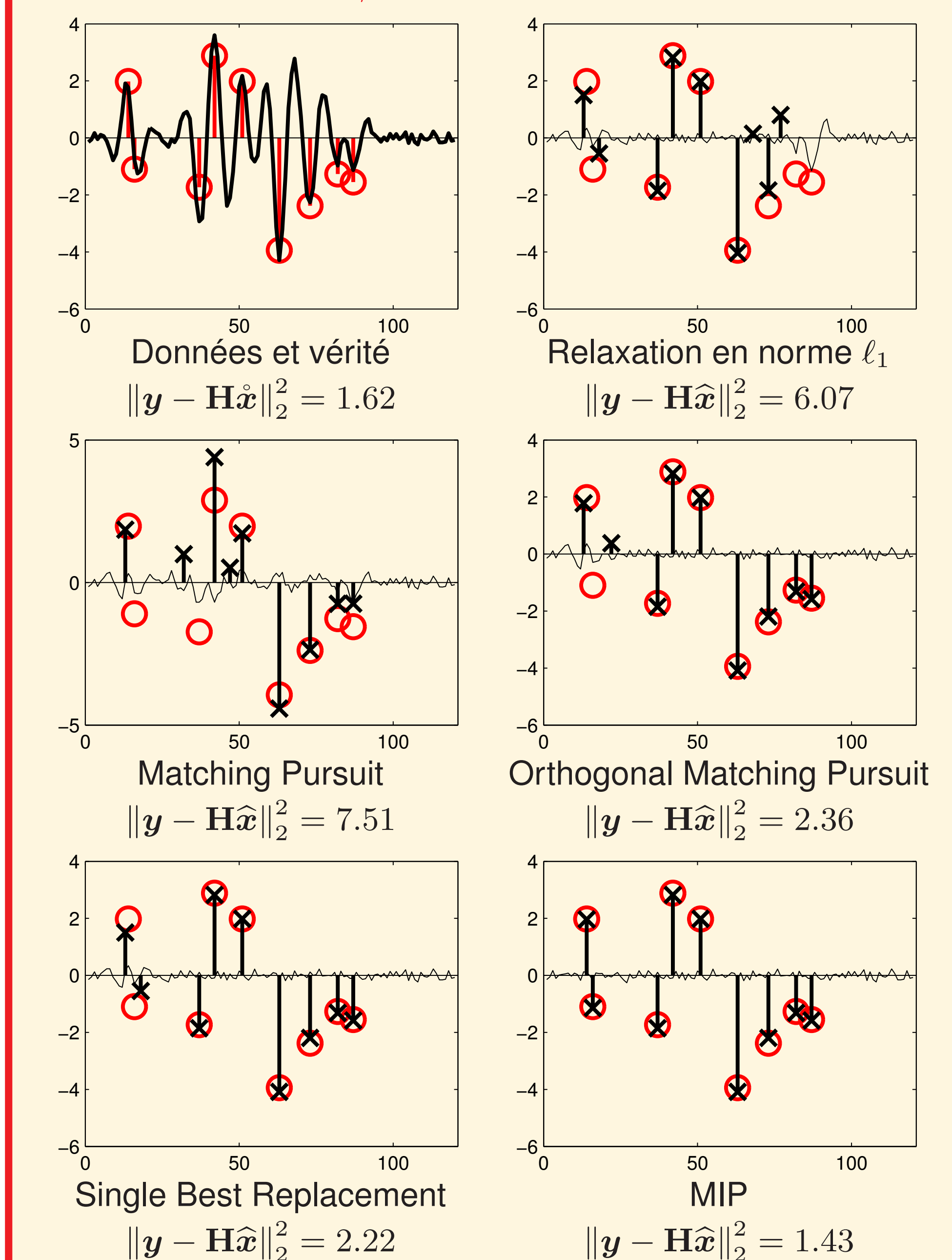
$\rightsquigarrow$  Optimisation possible ... dans une certaine mesure

$\rightsquigarrow$  Coût  $\nearrow$  avec le bruit et le nombre de composantes

$\rightsquigarrow$  Attache aux données  $\ell_2$  : formulation  $\mathcal{P}_{2/0}$   
 $\ell_1$  ou  $\ell_\infty$  : formulation  $\mathcal{P}_{0/p}$

• Plus de résultats dans [5]. ..

## SOLUTIONS OBTENUES

• Exemple pour  $\mathcal{P}_{2/0}$  (RSB = 20 dB) :• Erreurs d'estimation entre  $\hat{x}$  (vérité) et  $\hat{x}$  (estimé) :

i) convolution des impulsions par un noyau gaussien ( $\sigma = 1$ )

ii)  $d(\hat{x}, \hat{x}) :=$  erreur  $\ell_2$  entre les deux signaux convolués

RSB	Relax. $\ell_1$	MP	OMP	SBR	MIP
30 dB	9.1	3.9	3.3	2.3	0.1
20 dB	8.6	3.9	3.3	2.2	0.3
10 dB	7.5	4.1	3.6	2.8	1.6

Distances  $d(\hat{x}, \hat{x})$  moyennées sur 100 réalisations

## PERSPECTIVES

## • Réduction du coût de calcul

– Stratégies « intelligentes » de branchement basées sur la connaissance du problème

– Autres types de résolutions exactes : quadratic convex reformulation (QCR)

$\rightsquigarrow$  approximations successives du MIP par des programmes d'optimisation semi-définie positive (SDP)

## • Prise en compte de contraintes supplémentaires (positivité, somme à 1)

## • Problèmes avec parcimonie structurée [6]

## • Optimisation multi-objectifs